ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

28. veljače 2017.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi $\alpha + \beta = 90°$. 1 BOD
Iz $\alpha = 4k$ i $\beta = 5k$ redom slijedi: $4k + 5k = 90°$, $9k = 90°$, i konačno $k = 10°$, 1 BOD
odakle je $\alpha = 40°$ i $\beta = 50°$. 2 BODA
Kut α se smanjio za 8 % od 40°, što iznosi 3.2° = 3° 12', 1 BOD
pa je sada $\alpha_1 = 40° - 3° 12' = 36° 48'$. 1 BOD
Onda je kut $\beta_1 = 90° - 36° 12' = 53° 12'$ (ili $\beta_1 = 50° + 3° 12' = 53° 12'$). 1 BOD
Kut β se, dakle, povećao za 3° 12'. 1 BOD
Kako je 3.2 : 50 = 0.064, 1 BOD
zaključujemo da se veći kut povećao za 6.4 %. 1 BOD
…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Iz omjera $\alpha : \beta = 4 : 5$ dobije se $5\alpha = 4\beta$ i $\alpha = \frac{4}{5}\beta$. 1 BOD

Za š:iljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi $\alpha + \beta = 90°$, odnosno $\frac{4}{5}\beta + \beta = 90°$. 1 BOD

Dalje je $\frac{9}{5}\beta = 90°$, iz čega se izračuna $\beta = 50°$. 1 BOD
Tada je $\alpha = 90° - 50° = 40°$. 1 BOD
Kut α se smanjio za 8 % od 40°, što iznosi 3.2° = 3° 12', 1 BOD
pa je sada $\alpha_1 = 40° - 3° 12' = 36° 48'$. 1 BOD
Onda je kut $\beta_1 = 90° - 36° 12' = 53° 12'$ (ili $\beta_1 = 50° + 3° 12' = 53° 12'$). 1 BOD
Kut β se, dakle, povećao za 3° 12'. 1 BOD
Kako je 3.2 : 50 = 0.064, 1 BOD
zaključujemo da se veći kut povećao za 6.4 %. 1 BOD
…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi $\alpha + \beta = 90°$, pa je $\beta = 90° - \alpha$. 1 BOD
Tada je $\alpha : (90° - \alpha) = 4 : 5$. 1 BOD
Iz $5\alpha = 360° - 4\alpha$ dobiva se $9\alpha = 360°$ i $\alpha = 40°$. 1 BOD
Tada je $\beta = 90° - 40° = 50°$. 1 BOD
Kut α se smanjio za 8 % od 40°, što iznosi 3.2° = 3° 12', 1 BOD
pa je sada $\alpha_1 = 40° - 3° 12' = 36° 48'$. 1 BOD
Onda je kut $\beta_1 = 90° - 36° 12' = 53° 12'$ (ili $\beta_1 = 50° + 3° 12' = 53° 12'$). 1 BOD
Kut β se, dakle, povećao za 3° 12'. 1 BOD
Kako je 3.2 : 50 = 0.064, 1 BOD
zaključujemo da se veći kut povećao za 6.4 %. 1 BOD
…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik točno izračuna traženi postotak, a da pri tom nije izračunao kutove α_1 i β_1, ne skidaju mu se bodovi.

2. Prvi način:

Prije 6 godina, u prvom razredu, Marko je imao 7 godina, a njegova sestra 8 godina. 1 BOD

Iznos Markova džeparca bio je 35 kn. Ako sa x označimo mjesečni džeparac Markove sestre, tada vrijedi razmjer $35 : x = 7 : 8$. 1 BOD

Iz tog se razmjera izračuna $7x = 280$ i $x = 40$. Te godine sestrin džeparac iznosio je 40 kn, 1 BOD

a roditelji su im ukupno davali 75 kn mjesečno. 1 BOD

U sljedećih šest godina taj se iznos povećavao za 10 kn svake godine, pa sad iznosi $75 + 10 \cdot 6 = 135$ kuna, 1 BOD

pri čemu ga Marko i sestra i dalje dijele u omjeru svojih godina, sada 13 : 14. 1 BOD

Ako traženi iznos Markovog džeparca označimo s y, onda sestri pripada $135 - y$, te vrijedi razmjer $y : (135 - y) = 13 : 14$ 1 BOD

Vrijedi $14y = 13 \cdot (135 - y)$, $14y = 1755 - 13y$, 1 BOD

te dalje $27y = 1755$ i $y = 65$. 1 BOD

U sedmom razredu Marko dobiva 65 kuna mjesečno. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Prije šest godina Marko je imao 7 godina, a njegova sestra 8 godina. 1 BOD

Džeparac su dijelili u omjeru svojih godina. Ako je Marko dobivao $7k$ kuna, a sestra $8k$ kuna, onda su zajedno dobivali $15k$ kuna. 1 BOD

Budući da je poznat iznos Markova džeparca, 35 kn, tada iz $7k = 35$ slijedi $k = 5$, 1 BOD

tj. ukupan iznos džeparca bio je 75 kn. 1 BOD

Tijekom šest godina taj se iznos povećao za 60 kn, pa sad iznosi 135 kn. 1 BOD

Oni ga i dalje dijele u omjeru svojih godina: Marko ima 13, a sestra 14 godina. 1 BOD

Marko ima $13k$ kn, a sestra $14k$ kn, što je ukupno $27k$ kn. 1 BOD

Iz $27k$ kn = 135 kn, 1 BOD

izračuna se $k = 5$. 1 BOD

Markov sadašnji džeparac iznosi $13 \cdot 5 = 65$ kuna. 1 BOD

…………………………………………………………..……..………..… UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Iz početne jednadžbe izrazi se nepoznanica x:

$10x - 15k + 5k = 4x - 32 + k$ 1 BOD

$10x - 4x = 15k - 5k - 32 + k$ 1 BOD

$6x = 11k - 32$ 1 BOD

$x = \dfrac{11k - 32}{6}$ 1 BOD

Iz uvjeta $x > 0$ slijedi $11k - 32 > 0$, odnosno 1 BOD

$11k > 32$ i $k > \dfrac{32}{11}$. 1 BOD

Iz $\dfrac{32}{11} = 2\dfrac{10}{11}$ 1 BOD

se zaključi da je traženi najmanji prirodni broj $k = 3$. 1 BOD

Rješenje jednadžbe za $k = 3$ dobije se uvrštavanjem te vrijednosti u već izračunati izraz $x = \dfrac{11k - 32}{6}$, dobivamo da je $x = \dfrac{11 \cdot 3 - 32}{6}$. 1 BOD

Rješenje je $x = \dfrac{1}{6}$. 1 BOD

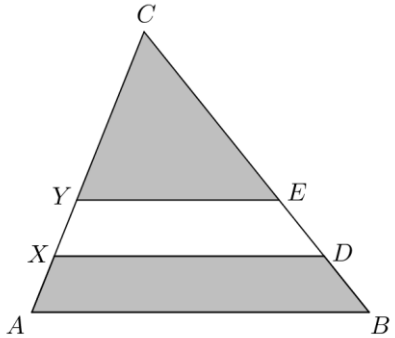
…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:
Početak rješavanja identičan je prethodnom postupku do izračuna $k = 3$ (za ukupno 8 BODOVA).
Ako se $k = 3$ uvrsti u početnu jednadžbu dobije se $5 \cdot (2x - 9) + 15 = 4 \cdot (x - 8) + 3$. 1 BOD
Rješenje te jednadžbe je $x = \frac{1}{6}$. 1 BOD
………………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je zadani razlomak $\frac{x}{y}$.
Ako se brojnik x smanji za 8 %, brojnik novog razlomka bit će $0.92x$. 1 BOD
Ako se nazivnik y poveća za 8 %, nazivnik novog razlomka bit će $1.08y$. 1 BOD
Novi razlomak je oblika $\frac{0.92x}{1.08y}$. 1 BOD
Dalje je $\frac{0.92x}{1.08y} = \frac{92x}{108y} = \frac{23x}{27y}$. 1 BOD
Treba riješiti jednadžbu $\frac{x}{y} - \frac{0.92x}{1.08y} = 2$ 1 BOD
$\frac{x}{y} \cdot \left(1 - \frac{23}{27}\right) = 2$ 1 BOD
$\frac{x}{y} \cdot \frac{4}{27} = 2$ 1 BOD
$\frac{x}{y} = 2 : \frac{4}{27}$ 1 BOD
$\frac{x}{y} = 2 \cdot \frac{27}{4}$ 1 BOD
$\frac{x}{y} = \frac{27}{2}$ 1 BOD
……………………………………………………………..……….…….… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Jednadžbu $\frac{x}{y} \cdot \frac{4}{27} = 2$ moguće je rješavati i na druge načine, npr. nakon dijeljenja brojem 4 dobiva se $\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{27} = \frac{2}{4}$, odnosno $\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{2}$, pa množenjem brojem 27 dobivamo $\frac{x}{y} = \frac{27}{2}$.
I taj način rješavanja boduje se s 3 boda.

5. Neka je D druga krajnja točka dužine paralelne s dužinom $\overline{AB}$ točkom X i E druga krajnja točka dužine paralelne s dužinom $\overline{AB}$ točkom Y.



Promatramo trokute ΔXDC i ΔABC. Vrijedi da je $|\angle XCD| = |\angle ACB|$ (zajednički kut kod vrha C) i

$|\angle CXD| = |\angle CAB|$ (kutovi s usporednim kracima ili kutovi uz presječnicu). Prema KK poučku, trokuti ΔXDC i ΔABC su slični. 1 BOD

Iz $|CX| : |XA| = 4 : 1$ zaključujemo da je omjer $|CX| : |CA| = 4 : 5$, tj. koeficijent sličnosti tih trokuta je $k = \frac{4}{5}$. 2 BODA

Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati ($k \cdot k$) duljina odgovarajućih stranica, dakle vrijedi

$p_{\Delta XDC} : p_{\Delta ABC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$, odnosno $p_{\Delta XDC} = \frac{16}{25} p_{\Delta ABC}$. 1 BOD

Izrazimo površinu osjenčanog dijela tj. površinu četverokuta *ABDX*.

$p_{ABDX} = p_{\Delta ABC} - p_{XDC} = p_{\Delta ABC} - \frac{16}{25} p_{\Delta ABC} = \frac{9}{25} p_{\Delta ABC}$. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka je $p_{\Delta YEC} = p_{ABDX} = \frac{9}{25} p_{\Delta ABC}$. 1 BOD

Trokuti ΔYEC i ΔABC su također slični prema poučku KK (zajednički kut kod vrha *C* i sukladni kutovi uz presječnicu). 1 BOD

Iz omjera površina tih trokuta $p_{\Delta YEC} : p_{\Delta ABC} = 9 : 25$, slijedi da je koeficijent proporcionalnosti $k = |CY| : |CA| = 3 : 5$. 2 BODA

Tada je $|CY| : |YA| = 3 : 2$. 1 BOD

……………………………………………………………..…..…………..… UKUPNO 10 BODOVA