ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2017.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Jani je nedostajala $\frac{1}{3}$ cijene šešira, Danieli $\frac{1}{4}$, a Hani $\frac{1}{5}$ cijene šešira, 2 BODA

što znači da im je ukupno nedostajalo

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}=\frac{47}{60}$ cijene jednoga šešira. 3 BODA

Kad je šešir pojeftinio 94 kn, to je sestrama pokrilo nedostatnu svotu, tj.

vrijedi da je $\frac{47}{60}$ cijene šešira jednako $3 \cdot 94 = 282$ kn. 2 BODA

Tada je $\frac{1}{60}$ cijene šešira jednaka $282 : 47 = 6$ kn, 2 BODA

a cijena šešira je $60 \cdot 6 = 360$ kn. 1 BOD

………………………………………………………………..….… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je x cijena šešira (u kunama) prije sniženja.

Jana ima $\frac{2}{3}x$, Daniela $\frac{3}{4}x$, a Hana $\frac{4}{5}x$ kuna. 3 BODA

Nakon sniženja cijena tri šešira je $3(x-94)$. 1 BOD

Vrijedi: $\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}x=3(x-94)$ 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobivamo redom:

$\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}x=3x-282$

$\frac{40}{60}x+\frac{45}{60}x+\frac{48}{60}x=\frac{180}{60}x-282$ 1 BOD

$\frac{47}{60}x=282 \quad / : 47$ 1 BOD

$\frac{1}{60}x=6$ 1 BOD

$x = 360$ 1 BOD

Cijena šešira prije sniženja bila je 360 kn. 1 BOD

……………………………………………………………….… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Neka je x cijena šešira (u kunama) prije sniženja.

Jana ima $\frac{2}{3}x$, Daniela $\frac{3}{4}x$, a Hana $\frac{4}{5}x$ kuna. 3 BODA

Nakon sniženja cijena tri šešira je $3(x-94)$. 1 BOD

Vrijedi: $\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}x=3\left(x-94\right)$ 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobivamo redom:

$\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}x=3x-282 \quad / \cdot 60$ 1 BOD

$40x+45x+48x=180x-16\,920$ 1 BOD

$47x = 16\,920 \quad / : 47$ 1 BOD

$x = 360$ 1 BOD

Cijena šešira prije sniženja bila je 360 kn. 1 BOD

…………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Jedan šešir je pojeftinio za 94 kn, pa su sva tri šešira pojeftinila za 282 kn. 1 BOD

Jani je nedostajala $\frac{1}{3}$ cijene šešira, Danieli $\frac{1}{4}$, a Hani $\frac{1}{5}$ cijene šešira, 2 BODA

Trima sestrama ukupno je nedostajalo $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}=\frac{47}{60}$ cijene jednoga šešira. 3 BODA

Označimo li s x cijenu jednog šešira, vrijedi jednadžba $\frac{47}{60}x=282$. 1 BOD

Njenim rješavanjem nalazimo

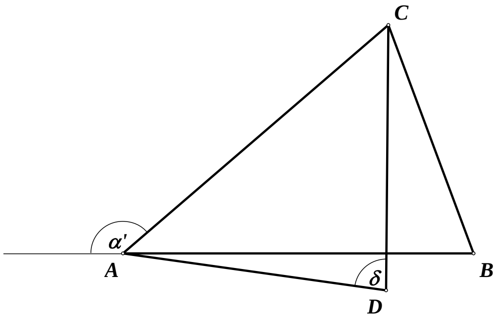
$47x = 16\,920 \, / : 47$ 1 BOD

$x = 360$ 1 BOD

Cijena šešira prije sniženja bila je 360 kn. 1 BOD

…………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



ΔABC je jednakokračan, pa su kutovi uz osnovicu $\overline{BC}$ sukladni, 1 BOD

a α' je veličina vanjskog kuta tog trokuta pa slijedi $\left|\angle ABC\right| = \left|\angle ACB\right| = \frac{\alpha'}{2}$. 2 BODA

ΔADC je jednakokračan, pa su kutovi uz osnovicu $\overline{AC}$ sukladni i vrijedi

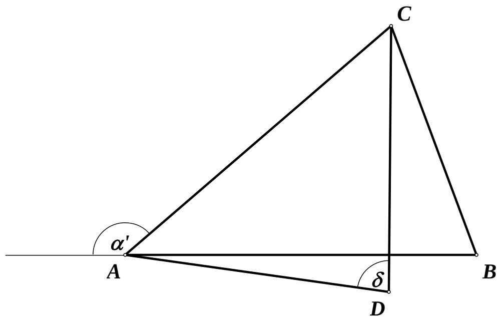
$$\left|\angle DAC\right| = \left|\angle ACD\right| = \frac{180^\circ-\delta}{2} = 90^\circ - \frac{\delta}{2}.$$ 3 BODA

Kako je $\left|\angle ACB\right| = \left|\angle ACD\right| + \left|\angle BCD\right|$, slijedi $\frac{\alpha'}{2}=90^\circ-\frac{\delta}{2}+\left|\angle BCD\right|$, 2 BODA

a odatle je $\left|\angle BCD\right|=\frac{\alpha'}{2}+\frac{\delta}{2}-90^\circ=\frac{\alpha'+\delta}{2}-90^\circ=100^\circ-90^\circ=10^\circ$. 2 BODA

…………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Zbog $|AB| = |AC|$ zaključujemo da je trokut ΔABC jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$,
pa vrijedi $\beta = \gamma$. 2 BODA

Zbog $|AD| = |DC|$ zaključujemo da je trokut ΔADC jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$,
pa vrijedi $|\angle CAD| = |\angle ACD| = (180° - \delta) : 2 = 90° - \frac{1}{2}\delta.$ 3 BODA

Budući da je $\alpha' = \beta + \gamma = 2\beta,$ onda je prema uvjetu zadatka $2\beta + \delta = 200°$,
pa je $\delta = 200° - 2\beta.$ 1 BOD

Uz oznake kao na slici vrijedi $|\angle ACD| + |\angle BCD| = \beta,$ 1 BOD

pa nakon uvrštavanja dobivamo redom $90° - \frac{1}{2}\delta + |\angle BCD| = \beta,$ 1 BOD

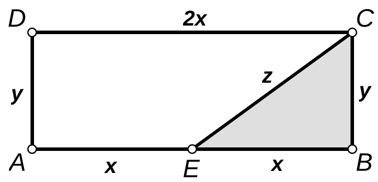
$90° - 100° + \beta + |\angle BCD| = \beta,$ 1 BOD

$|\angle BCD| = 10°.$ 1 BOD

…………………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

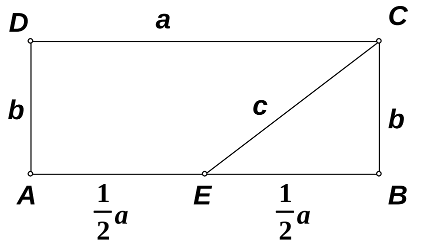
Skica: 1 BOD



Uz oznake kao na slici, opseg trokuta EBC jednak je $x + y + z = 36$ cm,
opseg četverokuta $ECDA$ je $z + 2x + y + x = 60$ cm,
a opseg pravokutnika $ABCD$ je $4x + 2y = 66$ cm 3 BODA
Uvrstimo li u izraz $z + 2x + y + x = 60$ podatak da je $x + y + z = 36$,
dobivamo da je $2x = 24$ cm, tj. $x = 12$ cm. 2 BODA
Iz uvjeta $4x + 2y = 66$ i činjenice da je $x = 12$ dobivamo da je $y = 9$ cm 2 BODA
Površina trokuta EBC jednaka je polovini umnoška duljina njegovih kateta,
tj. $p(EBC) = xy : 2$.
Uvrštavanjem podataka dobivamo da je $p(EBC) = 54\ \text{cm}^2$. 2 BODA
…………………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Uvjete zadatka, uz oznake kao na slici, možemo pisati u obliku:

2*a* + 2*b* = 66, odnosno *a* + *b* = 33;

$\frac{1}{2}a+b+c=36;$

$a+b+\frac{1}{2}a+c=60.$ 3 BODA

Dalje je $a+b+\frac{1}{2}a+c=a+\left(b+\frac{1}{2}a+c\right)=a+36=60$, 1 BOD

odakle je *a* = 24 cm i 1 BOD

b = 33 – 24 = 9 cm. 2 BODA

Površina trokuta *ABC* jednaka je $p=\frac{1}{2}\cdot|EB|\cdot|EC|$, tj.

$p=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9=54$ cm^2. 2 BODA

………………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Decimalni zapis razlomka $\frac{11}{700}$ je $0.01571428571428...=0.01\overline{571428}$ 2 BODA

Sastoji se od pretperioda 01

i šesteroznamenkastog perioda 571428 koji se ponavlja. 1 BOD

Zbroj prve dvije decimale je 1. 1 BOD

Treba izračunati zbroj preostalih 448. Budući da je 448 = 74 · 6 + 4,

skupina od 6 znamenaka će se pojaviti 74 puta, 2 BODA

te će slijediti još prve četiri znamenke perioda. 1 BOD

Zbroj znamenaka u periodu je 27, 1 BOD

pa je traženi zbroj 1 + 74 · 27 + 5 + 7 + 1 + 4 = 2016. 2 BODA

………………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Decimalni zapis zadanog razlomka je $\frac{11}{700}=0.01571428571428...$ 2 BODA

Nakon prvih dviju decimala (0 i 1), čiji je zbroj jednak 1, 1 BOD

ciklički se ponavlja skupina od 6 znamenaka 571428, 1 BOD

čiji je zbroj jednak 27. 1 BOD

Budući da je 448 : 6 = 74 i ostatak 4, u nizu od 448 decimala 2 BODA

skupina od 6 znamenaka javlja se 74 puta,

a napisane su još prve četiri decimale sljedeće skupine. 1 BOD

Traženi zbroj znamenaka jednak je:
$1 + 74 \cdot 27 + (5 + 7 + 1 + 4) = 1 + 1998 + 17 = 2016.$ 2 BODA
…………………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

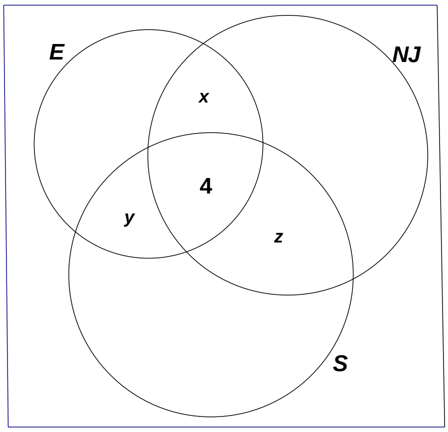
5. Prvi način:

Na engleski jezik ide ukupno 40 učenika. Od njih 40, 24 učenika se bavi i nekom sportskom aktivnošću, 10 učenika ide i na njemački jezik, a 4 učenika su uključena u sve tri aktivnosti.
Samo engleskim jezikom se bave $40 – 24 – 10 + 4 = 10$ učenika. 2 BODA
Analognim zaključivanjem dolazimo do broja učenika koji su uključeni
- samo na njemački jezik: $27 – 12 – 10 + 4 = 9$, 2 BODA
- samo u sportske aktivnosti: $60 – 24 – 12 + 4 = 28$. 2 BODA

Samo jednom aktivnosti se bavi $10 + 9 + 28 = 47$ učenika. 1 BOD
Nekom od ovih aktivnosti bavi se
$40 + 28 + 9 + (12 – 4) = 40 + 28 + 9 + 8 = 85$ učenika. 2 BODA
Nijednom od ovih aktivnosti ne bavi se
$94 – (40 + 9 + 28 + 8) = 94 – 85 = 9$ učenika. 1 BOD
…………………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

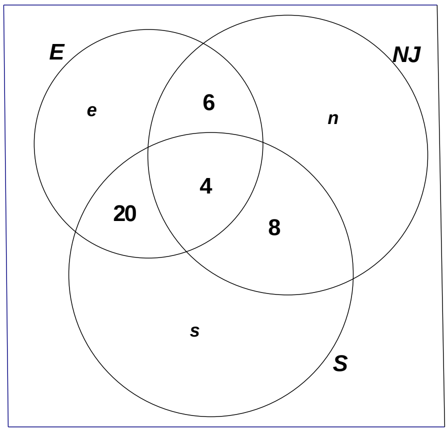
Drugi način:

Učenike šestog razreda dijelimo u tri skupine (koje imaju zajedničkih članova) pri čemu postoje i učenici koji ne pripadaju ni jednoj od tih skupina. Prikažimo te skupine grafički, krugovima koji imaju zajedničkih dijelova. U središnji dio, zajednički svim trima krugovima, upisujemo broj 4 jer se toliko učenika bavi sa sve tri aktivnosti.



1 BOD

Uz oznake kao na slici i uz uvjete zadatka redom vrijedi:
$x + 4 = 10$, tj. $x = 6$ 1 BOD
$y + 4 = 24$, tj. $y = 20$ 1 BOD
$z + 4 = 12$, tj. $z = 8$ 1 BOD

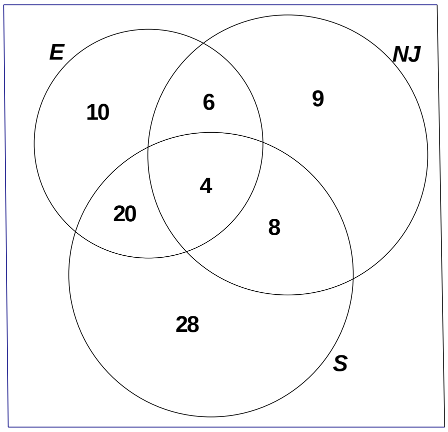


Uz oznake kao na slici i uz uvjete zadatka dalje vrijedi:

$e + 6 + 4 + 20 = 40$, tj. $e = 10$ 1 BOD

$n + 6 + 4 + 8 = 27$, tj. $n = 9$ 1 BOD

$s + 20 + 4 + 8 = 60$, tj. $z = 28$ 1 BOD



Samo jednom aktivnošću bavi se 10 + 9 + 28 = 47 učenika. 1 BOD

Nekom od ovih aktivnosti bavi se 10 + 20 + 4 + 6 + 9 + 8 + 28 = 85 učenika. 1 BOD

Niti jednom od ovih aktivnosti ne bavi se 94 – 85 = 9 učenika. 1 BOD

…………………………………………………………………….…...… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je Vennov dijagram točno ispunjen, ali nema popratnih obrazloženja, umanjiti broj bodova za 2.

Treći način:

Neka je E skup svih učenika koji uče engleski jezik, N skup svih učenika koji uče njemački jezik, a S skup svih učenika koji se bave sportom.

Pri tome vrijedi $k(E) = 40$, $k(N) = 27$, $k(S) = 60$, 1 BOD

$k(E \cap S) = 24$, $k(E \cap N) = 10$ i $k(N \cap S) = 12$ 1 BOD

$k(E \cap N \cap S) = 4$ 1 BOD

Tada vrijedi formula uključivanja i isključivanja:

$$k(E \cup N \cup S) = k(E) + k(N) + k(S) - \big(k(E \cap N) + k(E \cap S) + k(N \cap S)\big) + k(E \cap N \cap S)$$

1 BOD

Uvrštavanjem i računanjem redom dobivamo:

$k(E \cup N \cup S) = 40 + 27 + 60 - \big(10 + 24 + 12\big) + 4 = 127 - 46 + 4 = 85$ 1 BOD

Nekom od ovih aktivnosti bavi se 85 učenika, a niti jednom se na bavi 94 – 85 = 9 učenika.

1 BOD

Samo engleski uči 40 – (24 + 10) + 4 = 10 učenika, 1 BOD

samo njemački uči 27 – (10 + 12) + 4 = 9 učenika, 1 BOD
samo sportom bavi se 60 – (24 + 12) + 4 = 28 učenika. 1 BOD
Dakle, samo jednom od aktivnosti bavi se 10 + 9 + 28 = 47 učenika. 1 BOD
…………………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA